快 速 计 算 法

史 丰 收

安徽科学技术出版社

快速计算法

史丰收

*

安徽科学技术出版社
安徽省新华书店发行
安徽新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 2 字数 42,000
1979年3月第1版 1979年3月第1次印刷
印数 1—1.000,000
统一书号 13200·2 定价 0.17元

前　言

在日常生活、生产和各种工作中，我们经常要与数字计算打交道，笔算比较缓慢，计算工具携带又不方便。因此，长期以来一直有许多人在研究速算的方法。速算法，主要是口算或心算，它根据有关计算的辩证关系，简化运算过程，在很大程度上是用脑子进行的快速计算。

中国科学技术大学78级学生史丰收同学，从十一岁开始学习和研究速算法，经过数年努力，创立了一种不用计算工具的"快速计算法"，它能直接从高位数算起(从左到右)，一次写出答案，把繁琐的中间过程一概省去了。用这种速算法，他可以计算二十六位数以内的加、减、乘、除、乘方、开方，得数准确。任意两个八位数相乘，他只要三、四秒钟就能从容不迫地得出答案。在科大介绍快速计算法的一次报告会上，连续多次试验，都是如此迅速准确，听众为之惊叹！

史丰收同学是陕西省大荔县一个下中农家庭出身的高中毕业生。他在小学学习算术期间，就考虑如何在数学计算中找出速算的规律性，当他创立这一"快速计算法"时，很快就被陕西省有关领导发现，并及时得到有关方面的重视与支持。据《人民日报》今年九月二十一日报导："一九七二年，史丰收来北京，受到了周培源、吴有训、华罗庚等著名科学家的热情接待和鼓励。今年一月，中国科学院计算所、数学所、应用数学推广办公室等单位，对史丰收进行了考核，一

致认为，史丰收的快速计算法，方法巧妙，是国内外罕见的，在这方面有培养前途。”为了培养人才，中国科学技术大学破格录取了史丰收为一九七八级新生入数学系学习。

史丰收同学学习研究速算法，是以唯物辩证法为指导，通过反复实践，运用口诀的形式归纳总结出这一套“快速计算法”，使读、写、看、算得到了统一。这种科学的快速计算法，能随口报出计算结果，因此它具有计算速度快，答数准确性高的优点。这种速算法的关键，在于揭示了计算中“进位”和“相加”的规律性，从而使运算快速起来，答案自然也就很快地得到了。实际验证，这种快速计算法的计算之速，明显地超过了袖珍电子计算器。人们通过学习和练习，并不难掌握，所以很受广大群众的欢迎。

当前，我国正在实现四个现代化，工业、农业、商业、科研，直至国防建设等各行各业都在大干快上，无疑需要这种快速计算法，它对提高工作效率和计算准确性，将会起到积极作用；如能在小学里就开始试行推广，对我国的教育改革也将是一个很大的推进。因此，推广它是很有意义的。

史丰收同学正在学校忙于学习，加上他理论水平的限制，他的快速计算法还处于初级阶段，同时限于时间，定稿较为仓促，其中错误之处，在所难免，希望读者给以指正。

北京师范大学数学系教授　赵慈庚
中国科学技术大学数学系教授　李宝光

1978.10.5

目 录

1 概述

乘法是快速计算法的基础。可是，两个多位数相乘，古今中外一直都是从个位数算起，再到十位，百位……。乘数有几位，就得列几排数，然后再从个位加起，最后得出乘积数，中间过程繁多，进位也容易出错。长期以来，有不少人曾考虑着如何能找出新的规律，以便提高计算效率。我带着这个问题，经过多年的学习与摸索，终于形成这一《快速计算法》。我认为，老算法之所以"慢"，关键在于两个问题没有解决，一是"进位"，二是"相加"。我的快速计算法，就是针对"进位"和"相加"的问题，试图有新的突破，从而提高了运算速度。

为了便于了解"快速计算法"的具体内容，首先谈谈与研究建立快速计算法有关的几个问题。

一、乘法和加法的关系

大家知道，十进制普通加法的运算法则是：数位对齐，逐位相加，满十进位。乘法的运算法则是：逐位相乘，同位数相加，满十进位。从表面上看，两者只有"满十进位"是相同的。其实，乘法里的"逐位相乘"，就表示着加法里的数位对齐相加，乘法里的"同位数相加"，就表示着加法里的逐位相加。两个法则叙述形式虽然不同，但运算实质是一致的，都是遵循十进制"同位数相加、满十进位"的规律，

这是加、乘的共性。但是，乘法与加法相比有着不同特点，即其个性。从普通加法看，相加数，每个同一数位上的数变化无常，是异数连加，而乘法所表示的数都是相同加数，每个同一数位上的数都相同，即“同数”连加，这是乘法的特性，是乘法不同于一般加法的地方，它说明了加、乘之间的关系，更反映出乘法规律性强之所在，是乘法简便于加法的根据。“快速计算法”就是抓住了乘法这一特点，研究建立起新的简捷算法。

二、速算乘法运算程序的建立

普通加法与乘法的运算，有交换律、结合律、分配律。它们的运算与其相加或相乘数的“运算顺序”无关，也就是说，可以从低位算起，也可以从高位算起，还可以从中间任一位算起。

例如：7462×2

$=7000\times2+400\times2+60\times2+2\times2$(高位算起)

$=2\times2+60\times2+400\times2+7000\times2$(低位算起)

$=400\times2+60\times2+2\times2+7000\times2$(中间任一位算起)

按这个特点，结合数的读、写、看、算都是由左到右(由高位到低位)进行，唯独一般加、减、乘运算是由低位到高位进行，读、写、看、算四者不统一。而日常生活中却又是先算大数后算小数。考虑到这种脱节、因此产生了乘法也从高位算起的想法，欲把四者统一起来，在实际应用中就方便了。

乘法运算的实质，都是“同位数相加，满十进位”，而本位的个位数与它后位的进位数是同位数，要进行相加，就

提出了这样的问题：本位的个位数有无规律？后位的进位数有无规律？能否在运算中把后位的进位数提前找到，提前加到本位中来，即“提前进位”呢？使之达到高位算起，边算边清位，边算边定得数，计算速度就必然大大加快了。但是，实现“提前进位”，取决于相乘数的个位规律（简称个律）和进位规律（简称进律）的掌握，这是从高位算起要解决的主要问题。

在加法里，每位数相加的和有进、个，所得和的个位数与乘法里每位相乘所得积的个位数是相同的。所得和的进位数与所得积的十位数是一致的，都表示着进位数。所不同的，加法的进位数是用进位点“·”表示，运算中把它写在横线上，前位的右下角；而在乘法里，进位数则用数字表示，写在横线下，同前位对齐。深入研究这种形式上的不同，从中找出共同性规律性的东西。低位算起的加法，用进位点暂记进位数比较方便，乘法中进位数用数字表示比较方便，现在，我们从这一方便出发，将加、乘书写形式的不同变得统一起来，都用数字来表示。这样做，并不影响运算的正确性，相反，更符合实际，更有利于寻找其中的规律性。我们把连加运算的这种书写方式，称为分裂进、个。因为，原来的运算是把进位数与前位的个位数完全当成一回事，按前位的个位数来对待，这样便造成错觉，掩盖了加法运算的实质，因此，现在把这样的书写方式改变过来是很有必要的。

后位的进位数简称“后进”，本位的个位数简称“本个”。

普通加法　　　　　　　　分裂进、个加法

```
普通加法                 分裂进、个加法
    8 3 4 4                 8 3 4 4
      2 9 6                   2 9 6
      5 4 3                   5 4 3
      7 8 9                   7 8 9
+   2 0 0 4             +   2 0 0 4
-----------             -----------
  1 1 9 7 6               1 1 2 2     →(后进)
                        +   0 7 5 6   →(本个)
                        -----------
                          1 1 9 7 6   →(和＝后进＋本个)
                         (和的每位数)
```

从“分裂进、个”算式中，我们竖看和的每位数是：首位数为“后进”，尾位数为“本个”，中间各位数都是“本个加后进”。因为相加数的最高位前位是0，最低位的后位也是0。所以和的每位数就可以统一为“本个加后进”。

加法的特例：同数连加 ⟶ 乘法

```
    8 3 4 2                 8 3 4 2
    8 3 4 2                 ×     4
    8 3 4 2               ---------
+   8 3 4 2               3 1 1 0    →(后进)
-----------                 2 2 6 8  →(本个)
  3 1 1 0    →(后进)      ---------
    2 2 6 8  →(本个)      3 3 3 6 8  →(积)
-----------              (积的每位数)
  3 3 3 6 8  →(和)
 (和的每位数)
```

同加法一样，竖看，积的每位数是：首位数为“后进”，尾位数为“本个”，中间各位数都是“本个加后进”。同样可以看出：相乘数的最高位前位没有数，是0；最低位的后位也没有数，是0，因此，也可以说，积的每位数可以统一为“本个加后进”。

由此看来，乘法问题，实质上还是相乘中“本个加后进”的重复运算，即积的每位数都可由高到低，按“本个加后进”逐位推移的方法运算得到。而除法则是乘法的逆运算，在相乘除的过程中要用到加减法，所以说乘法是快速计算法的基础。

2 一位数乘多位数

我们知道，算术四则就是加、减、乘、除的算法。我们按照由易到难的原则，先介绍“一位数乘多位数”的速算法。这就是乘数为一位数，而被乘数为多位数。

任何一个 n 位数乘以一位数，其结果将是一个 n 位数或 $n+1$ 位数。例如：$2345\times3=7035$，这里是四位数($n=4$)2345乘以一位数3，得数是四位数7035。又如：$9999\times9=89991$，这里是四位数($n=4$)乘以一位数，结果是五位数($5=n+1$)。为了说起来统一起见，我们约定把 n 位数乘以一位数的得数仍是 n 位数的情形也说成是 $n+1$ 位，而其第一位是0。比如前一例中得数7035是四位数，我们也可以把它说成五位数07035。作这样的约定后，我们就可以统一地说：一个 n 位数乘以一位数，其得数是 $n+1$ 位数。(注1)

作了上述约定后，我们根据一般乘法规律，还可以得出一个结论：多位数乘以一位数时，得数中的第 m 位数，是由被乘数第 $m-1$ 位数以及跟随这位数的若干位数和乘数而确定的。

例如$1757\times2=3514$按上述约定其积应是五位，所以积可以变成03514。积的第三位数不是1而是5，它等于被乘数的第二位数7与乘数2相乘所得的个位数4，与7后的数5乘2所得的进位数1相加而得。又如$5375\times2=10750$，因积

的位数已经够五位，所以积的首位数不应补 0 。积的第三位数 7 ，是由被乘数的第二位数 3 乘 2 所得 6 ，与 3 后的数 7 乘 2 所得的进位数 1 相加而得。

由此可见，要确定乘积中第 m 位的数，关键是要确定进位数，也就是说要找出进位规律来。

我们可以把被乘数的第 $m-1$ 位当作个位数，该位以后的数看作小数（小数点后的数），设这个小数为 K ，并设乘数为 b，被乘数的第 $m-1$ 位数为 a_{m-1}，积的第 m 位数为 c_m，则 $c_m=a_{m-1}\cdot b$ 的个位数 + $K\cdot b$ 进到个位的数

显然，当 $1\leqslant K\cdot b<2$ 时，就进 1 。用 b 除不等式得

$$\frac{1}{b}\leqslant K<\frac{2}{b}$$

这就是说，当小数部分 K 大于、等于 $\frac{1}{b}$ 而小于 $\frac{2}{b}$ 时，就进 1 。所以，我们把 $\frac{1}{b}$ 叫做乘数为 b 的进位单位。（注2）

当 $2\left(\frac{1}{b}\right)\leqslant K<3\left(\frac{1}{b}\right)$ 时，就进 2 ；$3\left(\frac{1}{b}\right)\leqslant K<4\left(\frac{1}{b}\right)$ 时，就进 3 ；依此类推。

不同的乘数 b，进位单位也是不同的，现排列于下：

乘数 (b)	进位单位 $\left(\frac{1}{b}\right)$
2	$\frac{1}{2}=0.5$

注1、2 的数学证明见附录。

3　　$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$

4　　$\frac{1}{4}=0.25$

5　　$\frac{1}{5}=0.2$

6　　$\frac{1}{6}=0.1\dot{6}$

7　　$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$

8　　$\frac{1}{8}=0.125$

9　　$\frac{1}{9}=0.\dot{1}$

于是，我们进一步可以得出乘数分别为2到9的进位规律：

乘数	进位规律
2	满5进1
3	超$\dot{3}$进1　超$\dot{6}$进2
4	满25进1　满50进2　满75进3
5	满2进1　满4进2　满6进3　满8进4
6	超$1\dot{6}$进1　超$\dot{3}$进2　满5进3　超$\dot{6}$进4　超$8\dot{3}$进5
7	超$\dot{1}4285\dot{7}$进1　超$\dot{2}8571\dot{4}$进2　超$\dot{4}2857\dot{1}$进3　超$\dot{5}7142\dot{8}$进4　超$\dot{7}1428\dot{5}$进5　超$\dot{8}5714\dot{2}$进6
8	满125进1　满25进2　满375进3　满5进4　满625进5　满75进6　满875进7
9	超$\dot{1}$进1　超$\dot{2}$进2……超$\dot{8}$进8

所谓“满”，是“大于”、“等于”的意思，“超”是“大

于”的意思。例如

满5进1，即满0.5时，以2乘之进1。

超$\dot{3}$进1，即超$0.\dot{3}$时，以3乘之进1。

满25进1，即满0.25时，以4乘之进1。其余同理。

现在分别介绍乘数为2～9的具体速算法。

一、乘数为2

1.积首的确定

首先是确定积的首位数，即第一位数。现在规定：被乘数的首位数如果大于或等于5，那么积的首位数是1；被乘数的首位数如果小于5，其积的首位数是0（0一般不写）。

2.得积口诀

确定积的其余各位数，可按以下口诀。

1×2得2或3	6×2得2或3
2×2得4或5	7×2得4或5
3×2得6或7	8×2得6或7
4×2得8或9	9×2得8或9
5×2得0或1	0×2得0或1

为什么1×2得2或3呢？因为如果1的后一位数小于5，乘以2就没有进位，所以得数就是2，如果1的后一位数等于或大于5，乘以2就要进1，所以得数是3。其它口诀也是根据这个道理而确定的。

【例1】 5843×2=？

被乘数的首位数是5，所以积的首位数是1。然后，按

口诀逐个确定积的其余各位数。因为积的第2位数是由被乘数的第一位数和后一位数所确定的，而被乘数第一位数是5，后一位是8，根据口诀规定5乘以2得0或1，而8大于5，所以积的第二位数是1。下面，按口诀8×2得6或7，因为8后一位4小于5，所以是6。然后，按口诀4×2得8或9，后一位3小于5，所以是8。最后一位3，按口诀3×2得6或7，结果是6。这样我们就得出：5843×2＝11686

【例2】 47530275×2＝?

被乘数第一位是4，因为小于5，所以积的第一位是0（不写）。4按口诀4×2得8或9，因为4的后一位7大于5，所以是9。7按口诀7×2得4或5，7的后一位是5，得数应是5。5按口诀5×2得0或1，因为5后一位3小于5，所以是0。3按口诀3×2得6或7，3后一位是0，得数是6。0按口诀0×2得0或1，0后一位小于5，所以得数是0。2按口诀2×2得4或5，2的后一位7大于5，所以得数是5。5按口诀5×2得0或1，因为5是最后一位数字，得数只能取第1个数字，所以是0。这样，我们就得出：

47530275×2＝95060550

为了便于记忆起见，我们把上面十句口诀，还可以写成以下五句：

1和6×2得2或3
2和7×2得4或5
3和8×2得6或7
4和9×2得8或9
5和0×2得0或1

练　习

1. 47632×2=？　83269×2=？　73246×2=？
   61302×2=？　83415×2=？　71375×2=？
   13275×2=？　50029×2=？
2. 623487×2=？　543269×2=？　380719×2=？
   493567×2=？　263924×2=？　800132×2=？
   410953×2=？　510419×2=？
3. 1543921×2=？　3921671×2=？　5124936×2=？
   9671392×2=？　4633729×2=？　5170484×2=？
   6639678×2=？　8521476×2=？
4. 71195566×2=？　78507732×2=？
   93192876×2=？　69281743×2=？
   74581327×2=？　70113826×2=？
   54938917×2=？　78639273×2=？
   40250711×2=？　17249386×2=？

二、乘数为3

1.进位规律

首先介绍乘以3的进位规律：超$\dot{3}$进1，超$\dot{6}$进2。

超$\dot{3}$进1，就是说一个数如果大于33……而小于或等于66……时,乘以3进1。如34×3，334×3，因为34大于33，334大于333，所以乘以3都要进1。

超$\dot{6}$进2，就是说一个数如果大于66……时，乘以3进2。

如67×3，667×3，都要进2，因为67大于66，667大于666。

2.得积口诀

在某数乘以3时，首先根据乘以3的进位规律，确定了积的首位数，然后按照下列乘以3的口诀以及进位规律，确定积的其余各位数。

1×3得3或4或5　6×3得8或9或0
2×3得6或7或8　7×3得1或2或3
3×3得9或0或1　8×3得4或5或6
4×3得2或3或4　9×3得7或8或9
5×3得5或6或7　0×3得0或1或2

上述口诀的理解与掌握，是得数选择的关键。例如1×3得3或4或5，那么积究竟选择三个数字中哪一个呢？如果1的后一位数或几位数不超$\dot{3}$，得数是第一个数字；超$\dot{3}$得数是第二个数字；超$\dot{6}$，得数是第三个数字。

【例1】 473867×3＝？

被乘数首位是4超$\dot{3}$，所以积的首位数是1。然后，按口诀4×3得2或3或4，因为4后一位7超$\dot{6}$，所以是第三个数字4。7按口诀7×3得1或2或3，因为7的后两位数超$\dot{3}$，所以是第二个数字2。3按口诀3×3得9或0或1，因为3后一位8超$\dot{6}$，所以是第三个数字1。8按口诀8×3得4或5或6，因为8的后两位数超$\dot{6}$，所以是第三个数字6。6按口诀6×3得8或9或0，因为6后一位7超$\dot{6}$所以是第三个数字0，7按口诀7×3得1或2或3，因为7是最后一位数，所以积应是第一个数字1。这样我们就得出：

473867×3=1421601

【例2】 680332×3=?

我们从被乘数的前两位数68可看出是超$\dot{6}$的，所以积的首位数是2。然后，按口诀6×3得8或9或0，因为6后一位8超$\dot{6}$，所以是第三个数字0。8按口诀8×3得4或5或6，因为8后一位数是0，不超$\dot{3}$，所以是第一个数字4。0×3得0或1或2，因为0的后三位数不超$\dot{3}$，所以是第一个数字0。3按口诀3×3得9或0或1，因为3的后两位数不超$\dot{3}$，所以是第一个数字9。3按口诀3×3得9或0或1，因为3后一位2不超$\dot{3}$，所以是第一个数字9。2按口诀2×3得6或7或8，因为2是最后一位数，所以是第一个数字6这样，我们就得出：

680332×3=2040996

练　习

1. 68293×3=?　　83294×3=?　　37168×3=?
   54319×3=?　　70136×3=?　　65192×3=?
   54821×3=?　　38194×3=?　　72657×3=?
   57625×3=?
2. 392154×3=?　　151333×3=?　　406337×3=?
   139855×3=?　　276634×3=?　　729618×3=?
   833766×3=?　　667339×3=?　　549326×3=?
   682394×3=?
3. 4593126×3=?　　1354692×3=?　　7558931×3=?
   3667234×3=?　　3302334×3=?　　8167373×3=?

1953728×3=?　　6360662×3=?　　6664172×3=?

4063379×3=?

4\. 95691387×3=?　　67135667×3=?

33268334×3=?　　85446693×3=?

72189455×3=?　　77334618×3=?

55739936×3=?　　47199381×3=?

74829576×3=?　　67724943×3=?

三、乘数为 4

1.进位规律

乘以 4 的进位规律是：25以上(25～49)进 1

50以上(50～74)进 2

75以上(75～99)进 3

2.得积口诀

1×4得 4 或 5 或 6 或 7

2×4得 8 或 9 或 0 或 1

3×4得 2 或 3 或 4 或 5

4×4得 6 或 7 或 8 或 9

5×4得 0 或 1 或 2 或 3

6×4得 4 或 5 或 6 或 7

7×4得 8 或 9 或 0 或 1

8×4得 2 或 3 或 4 或 5

9×4得 6 或 7 或 8 或 9

0×4得 0 或 1 或 2 或 3

同样道理，得数的选择方法必须掌握。先按进位规律确定首位数，首位数确定以后，按口诀逐个进行计算。后两位小于25选择第一个数字，25以上选择第二个数字，50以上选择第三个数字，75以上选择第四个数字。

【例1】 24657×4=?

前两位数24小于25，积的第一位数应是0。然后，按口诀逐个进行计算。2按口诀2×4得8或9或0或1，因为4大于2（两个两位数比较大小时，第一位数大的数大），所以积是第二个数字9。4按口诀4×4得6或7或8或9，因为4后一位6大于5，所以积是第三个数字8。6按口诀6×4得4或5或6或7，因为6后一位数是5，所以积是第三个数字6。5按口诀4×5得0或1或2或3，因为5后一位7大于5，所以积是第三个数字2。7按口诀7×4得8或9或0或1，因为7是最后一位数，所以是第一个数字8。这样，我们就得出：24657×4=98628

【例2】 75308×4=?

先看前两位数75，按进位规律首位数是3。然后，逐个进行计算。7×4得8或9或0或1，因为后边两位数53大于50，所以积是第三个数字0。5按口诀5×4得0或1或2或3，因为5后两位数30大于25，所以积是第二个数字1。3按口诀3×4得2或3或4或5，因为3后一位数0小于25，所以积是第一个数字2。0按口诀0×4得0或1或2或3，因为0后一位8大于7(5)，所以积是第四个数字3。8按口诀8×4得2或3或4或5，因为8是最后一位数，所以积是2。这样，我们就得出：

75308×4=301232

我们可以把上面的十句口诀，简化为以下五句：

1 和6×4得 4 或 5 或 6 或 7

2 和7×4得 8 或 9 或 0 或 1

3 和8×4得 2 或 3 或 4 或 5

4 和9×4得 6 或 7 或 8 或 9

5 和0×4得 0 或 1 或 2 或 3

练　　习

1. 39628×4=? 57249×4=? 36297×4=?
   79316×4=? 54917×4=? 75068×4=?
   38726×4=? 69318×4=? 72194×4=?
   46189×4=?

2. 751314×4=? 542893×4=? 621738×4=?
   837126×4=? 217354×4=? 300213×4=?
   821373×4=? 501963×4=? 742413×4=?
   932187×4=?

3. 4529647×4=? 7672358×4=? 2532674×4=?
   4922468×4=? 6355247×4=? 9325873×4=?
   3914507×4=? 8241936×4=? 1246327×4=?
   2329376×4=?

4. 69241387×4=? 92678365×4=?
   61302498×4=? 98241356×4=?
   53129387×4=? 39267483×4=?
   12937564×4=? 35103127×4=?
   75681964×4=? 43777193×4=?

四、乘数为5

1.得积口诀

乘数为5的得积口诀，是按被乘数末尾补0折半而确定的。

0×5得0	1×5得0
2×5得1	3×5得1
4×5得2	5×5得2
6×5得3	7×5得3
8×5得4	9×5得4

2.计算方法

当乘数与被乘数中的偶数（0、2、4、6、8）相乘时，可以直接按口诀逐位进行计算。如果被乘数中碰到奇数（1、3、5、7、9）时，那么就要在后一位数的积上加5。如果被乘数的最后一位数是奇数，积的末尾直接补写5，如果是偶数，积的末尾直接补写0。

【例1】 673284×5＝？

按口诀6×5得3，所以积的首位数是3。7按口诀7×5得3，所以积的第二位数也是3。3按口诀3×5得1，因前一位是奇数，加5得6，所以积的第三位数是6。2按口诀2×5得1，因2的前一位数是奇数3，需在2的积上加5，所以积的第四位得数也是6。8按口诀8×5得4，所以积是4。4按口诀4×5得2，所以积是2。最后一位数4是偶数，根据以上规定，积的末尾补0。这样，我们就得出结果：

673284×5＝3366420

【例2】 10347×5＝?

根据口诀1×5得0，所以积的首位是0（可以不写）。0按口诀0×5得0，因为0的前一位数是奇数，所以积是0加5得5。然后，按口诀3×5得1，所以积是1。4按口诀4×5得2，因为4的前一位数是奇数3，所以要在4的积上加5得7。7按口诀7×5得3，所以积是3。因为7是奇数，并是最后一位数，根据以上规定，需补5，所以积的最后一位是5。这样，我们就得出结果：

10347×5＝51735

我们可以把上面的十句口诀，简化为以下五句：

0和1×5得0

2和3×5得1

4和5×5得2

6和7×5得3

8和9×5得4

练　习

1. 62513×5＝?　　31526×5＝?　　89219×5＝?

   93125×5＝?　　73949×8＝?　　82793×5＝?

   73296×5＝?　　59923×5＝?　　19263×5＝?

   50193×5＝?

2. 863195×5＝?　　623487×5＝?　　432695×5＝?

   432695×5＝?　　493567×5＝?　　800132×5＝?

   510419×5＝?　　281593×5＝?　　392174×5＝?

671594×5=?

3. 7558936×5=?　　5329186×5=?　　5733923×5=?

7693857×5=?　　8719639×5=?　　9486398×5=?

7239164×5=?　　5829392×5=?　　7391618×5=?

8454294×5=?

4. 13296451×5=?　　65425173×5=?

51930625×5=?　　78113126×5=?

69214794×5=?　　82191362×5=?

76231938×5=?　　84236918×5=?

93280574×5=?　　51231694×5=?

五、乘数为 6

1.进位规律

“速算法”的一位数乘多位数，当乘数为 6 、 7 、 8 、 9 时，可按照本位积的个位数加后位的进位数(满10,只取和的个位数)进行计算。

乘数为6的进位规律是：超$1\dot{6}$进1

超 $\dot{3}$ 进2

满5进3

超 $\dot{6}$ 进4

超$8\dot{3}$进5

我们已经知道，口诀中的所谓“超”，就是“大于”的意思。如：乘以 6 ，则“超$1\dot{6}$进 1 ”；如果等于或小于“16666……”，则不进；如果大于“16666……”，而小于“3333……”，则

进 1 。所谓“满”，就是“等于”或“大于”的意思。如：乘以 8，则“满125进 1”，就是等于或大于125而小于250时，须进 1 。

2.确定积的个位数

下面介绍用 6 去乘1～9的积的个位数。上面提到，乘数为 6 ，可按本位积的个位数加后位的进位数，满10者，只取和的个位数。

1 是 6	2 是 2	3 是 8
4 是 4	5 是 0	6 是 6
7 是 2	8 是 8	9 是 4

从以上个位数，可以看出，用 6 去乘偶数(0, 2, 4, 6, 8)的积的个位数是被乘数本身；用 6 去乘奇数(1, 3, 5, 7, 9)的积的个位是：被乘数够 5 减 5 ，不够 5 加 5 。这样就可以从被乘数本位直接观察出积的个位数，不需要记用 6 去乘1～9的积的个位数。

【例1】 479237×6＝？

首先用进位规律确定积首，被乘数第一位 4 超 $\dot{3}$ ，所以积首是 2 。然后逐位确定积的其余各位数。4 是 4 ，后位 7 超 $\dot{6}$ 进 4 ，所以积的第二位是 8 ； 7 是 2 ，后位 9 超8$\dot{3}$进 5 ，所以积的第三位是 7 ； 9 是 4 ，后位 2 超1$\dot{6}$进 1 ，所以积的第四位是 5 ； 2 是 2 ，后两位37超 $\dot{3}$ 进 2 ，所以积的第五位是 4 ； 3 是 8 ，后位 7 超 $\dot{6}$ 进 4 ，所以，积的第六位是 2 ；(本位的个位数加后位的进位数满10，只取和的个位数) 7 是 2 ，因 7 是被乘数末尾数，所以积的最后一位是 2 。

结果： 479237×6＝2875422

【例2】 332668×6＝?

被乘数前三位数332不超$\dot{3}$，而超$1\dot{6}$，所以积的第一位数是1。下面，3是8，后位3超$1\dot{6}$进1，所以积的第二位是9；3是8，后位2超$1\dot{6}$进1，所以积的第三位是9；2是2，后三位668超$\dot{6}$进4，所以积的第四位是6；6是6，后两位68超$\dot{6}$进4，所以积的第五位是0；6是6，后位8超$\dot{6}$进4，所以积的第六位是0；被乘数最后一位8是8，所以积的第七位数是8。

结果： 332668×6＝1996008

习　　题

1. 93258×6＝?　　63927×6＝?　　74986×6＝?
   83627×6＝?　　73198×6＝?　　53267×6＝?
   61173×6＝?　　37669×6＝?　　83342×6＝?
   33927×6＝?
2. 692413×6＝?　　751294×6＝?　　832973×6＝?
   721494×6＝?　　831425×6＝?　　663337×6＝?
   667332×6＝?　　233765×6＝?　　942517×6＝?
   681379×6＝?
3. 6929413×6＝?　　7336236×6＝?　　8123194×6＝?
   4913218×6＝?　　9529173×6＝?　　3719259×6＝?
   7151607×6＝?　　3002913×6＝?　　5213117×6＝?
   7319546×6＝?
4. 83329147×6＝?　　94251073×6＝?
   73950836×6＝?　　65251418×6＝?

16211494×6=？　　39215367×6=？

41942893×6=？　　51074932×6=？

71583127×6=？　　69413957×6=？

六、乘数为7

1.进位规律

乘数为7的进位规律是：超$\dot{1}4285\dot{7}$进1

超$\dot{2}8571\dot{4}$进2

超$\dot{4}2857\dot{1}$进3

超$\dot{5}7142\dot{8}$进4

超$\dot{7}1428\dot{5}$进5

超$\dot{8}5714\dot{2}$进6

2.确定积的个位数

乘数为7，也要记住用7去乘1～9积的个位数，如3×7=21的个位数为1，其余同理。

1是7	2是4	3是1
4是8	5是5	6是2
7是9	8是6	9是3

【例1】 379263×7=？

被乘数3超$\dot{2}8571\dot{4}$进2，所以积首是2，然后逐位进行计算。3是1，后位79超$\dot{7}1428\dot{5}$进5，所以积的第二位是6；7是9，后位9超$\dot{8}5714\dot{2}$进6，所以积的第三位是5；9是3，后两位26超$\dot{1}4285\dot{7}$进1，所以积的第四位是4，2是4，后位6超$\dot{5}7142\dot{8}$进4，所以积的第五位是8；6是2，后位

3 超$\dot{2}8571\dot{4}$进 2，所以积的第六位是 4； 3 是 1，因为 3 是最后一位数，所以积的第七位是 1 。

结果： 379263×7=2654841

【例2】 428657×7=？

被乘数前四位4286超$\dot{4}2857\dot{1}$进 3，所以积首是 3。 4 是 8，后位286超$\dot{2}8571\dot{4}$进 2，所以积的第二位是 0；2 是 4，后位86超$\dot{8}5714\dot{2}$进6，所以积的第三位是 0， 8 是 6，后位6超$\dot{5}7142\dot{8}$进 4，所以积的第四位是 0， 6 是 2， 后 两 位 57 超$\dot{4}2857\dot{1}$进 3，所以积的第五位是5，5 是5，后位 7 超$\dot{5}7142\dot{8}$进 4，所以积的第六位是 9，被乘数最后一位 7 是 9，所以积的第七位是 9 。

结果： 428657×7=3000599

习 题

1． 49236×7=？ 72649×7=？ 95132×7=？
52148×7=？ 38256×7=？ 74921×7=？
51296×7=？ 62507×7=？ 23293×7=？
39254×7=？

2． 932587×7=？ 741936×7=？ 835673×7=？
232937×7=？ 931482×7=？ 124632×7=？
151528×7=？ 835317×7=？ 411625×7=？
371492×7=？

3． 7142836×7=？ 1371093×7=？ 7148593×7=？
1438572×7=？ 5743962×7=？ 8061329×7=？
2858739×7=？ 6329732×7=？ 8172063×7=？

7591174×7=?

4. 93785296×7=?　　79132918×7=?

78460623×7=?　　50037421×7=?

29371682×7=?　　13295718×7=?

45196382×7=?　　85961383×7=?

71514914×7=?　　91199238×7=?

七、乘数为 8

1.进位规律

乘数为 8 的进位规律是：满125进 1

满25进 2

满375进 3

满 5 进 4

满625进 5

满75进 6

满875进7

2.确定积的个位数

这里乘数为 8，仍要记住用 8 去乘1～9的积的个位数：

1 是 8	2 是 6	3 是 4
4 是 2	5 是 0	6 是 8
7 是 6	8 是 4	9 是 2

从以上可以归纳成以下五句：

1 和 6 是 8　　2 和 7 是 6

3 和 8 是 4　　4 和 9 是 2　　5 和 0 是 0

上面五句口诀1和6、2和7、3和8、4和9、5和0，它们之间相差一个5，为什么它们的个位数相同呢？这是因为乘数8是偶数，偶数乘5，个位是0的缘故。

【例1】 462347×8=？

被乘数第一位4满375，所以积首是3。4是2，后位623小于625，满5进4，所以积的第二位是6；6是8，后位2满125进1，所以积的第三位是9；2是6，后位3满25进2，所以积的第四位是8；3是4，后位4满375进3，所以积的第五位是7，4是2，后位7满625进5，所以积的第六位是7；7是6，因为7是被乘数最后一位数，所以积的第七位是6。

结果： 462347×8=3698776

【例2】 124625×8=？

被乘数前三位124小于125，所以积的首位是0；(积首0不写）1是8，后位2满125进1，所以积的第二位是9；2是6，后位4满375进3，所以积的第三位是9；4是2，后三位625，满625进5，所以积的第四位是7；6是8，后两位25，满25进2，所以积的第五位是0；2是6，后位5，满5进4，所以积的第六位是0；5是0，因为5是最后一位数，所以积的第七位是0。

结果： 124625×8=997000

练　习

1. 87492×8=？　39274×8=？　78193×8=？
   39952×8=？　71413×8=？　74928×8=？

89174×8=?　　61513×8=?　　71312×8=?
13128×8=?

2. 874921×8=?　　574396×8=?　　624374×8=?
285873×8=?　　731926×8=?　　921254×8=?
731673×8=?　　751123×8=?　　316732×8=?
237613×8=?

3. 7846063×8=?　　6063482×8=?　　3915294×8=?
4925139×8=?　　7511213×8=?　　8319167×8=?
7149126×8=?　　5314927×8=?　　7391514×8=?
4112137×8=?

4. 83012954×8=?　　73195867×8=?
41261389×8=?　　77112436×8=?
12613754×8=?　　94251073×8=?
83392674×8=?　　49213673×8=?
54136927×8=?　　75003125×8=?

八、乘数为 9

1.进位规律

乘数为 9 的进位规律是超循环几进几。例如，超 $\dot{5}$ 进 5，超 $\dot{7}$ 进 7。在实际计算时，又可以用比较被乘数后位相邻两数的大小来确定进几。(如果后两位相同，还要继续向后看，直到出现异数为止)。如果后位相邻两数的前位小于后位，那么，前位是几就进几。如果前位大于后位，则进位数是前位减 1。

2.确定积的个位数

任何一个一位数乘以 9，其积的个位数是这个数的补数。(两数之和是10，它们互为补数)。所以 9 乘一个多位数，积的个位数的确定，可按本位数的补数加后位的进位数的方法进行。

【例1】 874632×9＝?

被乘数87不超 $\dot{8}$，所以积的首位数是 7。然后计算其余各位数。8 的补数是 2，8 的后两位数74超 $\dot{6}$ 进 6，所以积的第二位是 8；7 的补数是 3，7 的后两位数46超 $\dot{4}$ 进 4，所以积的第三位是 7；4 的补数是 6，4 的后两位数63超 $\dot{5}$ 进 5，所以积的第四位是 1；6 的补数是 4，6 的后两位数32超 $\dot{2}$ 进 2，所以积的第五位数是 6；3 的补数是 7，3 的后位 2 超 $\dot{1}$ 进 1，所以积的第六位是 8；2 是被乘数的最后一位数，因为 2 的补数是 8，所以积的第七位是 8。

结果： 874632×9＝7871688

【例2】 444726×9＝?

被乘数4447超 $\dot{4}$，所以积首是 4。4 的补数是 6，后三位447超 4 进 $\dot{4}$，所以积的第二位是 0；4 的补数是 6，后两位47超 $\dot{4}$ 进 4，所以积的第三位是 0；4 的补数是 6，后两位72超 $\dot{6}$ 进 6，所以积的第四位是 2；7 的补数是 3，后两位26超 $\dot{2}$ 进 2，所以积的第五位是 5；2 的补数是 8，后位 6 超 $\dot{5}$ 进 5，所以积的第六位是 3；6 的补数是 4，因为 6 是被乘数最后一位数，所以积的最后一位数是 4。

结果： 444726×9＝4002534

习　题

1. $72139\times 9=?$　$82647\times 9=?$　$75193\times 9=?$
$54193\times 9=?$　$62389\times 9=?$　$74236\times 9=?$
$85913\times 9=?$　$59131\times 9=?$　$77213\times 9=?$
$21394\times 9=?$

2. $638139\times 9=?$　$497782\times 9=?$　$591997\times 9=?$
$716753\times 9=?$　$841132\times 9=?$　$675418\times 9=?$
$779155\times 9=?$　$888923\times 9=?$　$573988\times 9=?$
$171192\times 9=?$

3. $8329167\times 9=?$　$5926785\times 9=?$　$8467293\times 9=?$
$5141007\times 9=?$　$1814137\times 9=?$　$7991326\times 9=?$
$5436275\times 9=?$　$1821553\times 9=?$　$6633714\times 9=?$
$4921537\times 9=?$

4. $38142967\times 9=?$　$74191423\times 9=?$
$76695327\times 9=?$　$76485938\times 9=?$
$45241917\times 9=?$　$33669248\times 9=?$
$77139287\times 9=?$　$89170264\times 9=?$
$66413274\times 9=?$　$89993726\times 9=?$

3 多位数加法与减法

加和减的速算法，除具有高位算起的特点外，还有以下特点：

1.以指算为基础。把手指作为一种简便的计算工具，脑记十位数，手示个位数，按照一定的规律手算笔记，既可减少思维和计算上的负担，也有利于提高口算能力。

2.实行算法上的转化。对于多位数减法、连减及加减混合，我们运用补数和负数概念，将减转化成加进行计算。这样，既简便了运算法则，也避免了计算过程中退位和连续退位的麻烦，有助于提高运算速度。

下面简要介绍加减速算的方法。

一、手指记数

以手指不同的伸或屈，分别表示十个基本数字。一般用左手，当手指表示某数后，五个指头自然地分成两部分，和拇指方向相同的部分叫该数的外指，和拇指方向相反的部分叫内指。现具体作如下规定：

1.拇指压指表示“1”。这时，“1”的外指是1，内指是4，如图(一)所示。

2.拇指、食指同时屈指表示“2”。这时，“2”的外指是2，内指是3，如图(二)所示。

3.拇指、食指、中指同时屈指表示“3”。这时“3”的外指是3，内指是2，如图(三)所示。

4.拇指、食指、中指、无名指同时屈指表示“4”。这时，“4”的外指是4，内指是1，如图(四)所示。

5.五指同时屈指表示“5”。这时，“5”的外指是5，内指是0，如图(五)所示。

6.拇指伸出表示“6”。这时，“6”的外指是1，内指是4，如图(六)所示。


图(一)


图(二)


图(三)


图(四)


图(五)


图(六)

7.拇指、食指同时伸出表示“7”。这时，“7”的外指是2，内指是3，如图(七)所示。

8.拇指、食指、中指同时伸出表示“8”。这时，“8”的外指是3，内指是2，如图(八)所示。

9.拇指、食指、中指、无名指同时伸出表示“9”。这时，“9”的外指是4，内指是1，如图(九)所示。

10.五指全部同时伸出表示“0”。这时，“0”的外指是5，内指是0，如图(十)所示。



图(七)



图(八)



图(九)



图(十)

二、加减指算基本类型

在加减指算中，必须掌握凑数、尾数和补数等概念。

指算是加减运算的基础，初学时可能有点不习惯，一定要反复练习，熟能生巧。

凑数——两数之和等于5，它们互为凑数。如：2和3、1和4、5和0各互为凑数。

尾数——小于10而超5的数，都可分成5和几，这里的“几”就叫该数的尾数。如：6可分成5和1，1叫6的尾数；7可分成5和2，2叫7的尾数。

补数——两数之和是10、100、1000、……，它们互为补数。

互补的两数具有前位之和是九、末位之和是十的特点。因此，求一个数的补数只要按‘前位凑九、末位凑十”即可求出。

1.直加直减类

（1）直加　两数相加，第一加数在0～4或5～9之间，而第二加数不超5。计算时可直接加上加数而求出和。如6＋3，6的内指是4，够加第二加数3，因此，可直加3而得到9。下面的题目都可直加。

0＋1(2、3、4、5)	5＋1(2、3、4、5)
1＋1(2、3、4)	6＋1(2、3、4)
2＋1(2、3)	7＋1(2、3)
3＋1(2)	8＋1(2)
4＋1	9＋1

直加的指算可以归纳为如下口诀：“加看内指，够加直加”。

在这里有两点值得注意：

a)在直加运算中，由第一加数的内指表达第二加数时，应按“数群”一次屈指或伸指，不可逐一累加。

b)在这种类型中，有5＋5、6＋4、7＋3、8＋2、9＋1，两加数恰好互补。其和是10，应脑记十位，手示0，即互补进1。

(2)直减　两数相减，被减数在5～1或10～6之间，而减数不超5。计算时可以直减得到差数。如8－2,8的外指是3，够减去减数2,因此，可直减2而得到6。下面的题目都可直减。

5－1(2、3、4、5)	10－1(2、3、4、5)
4－1(2、3、4)	9－1(2、3、4)
3－1(2、3)	8－1(2、3)
2－1(2)	7－1(2)
1－1	6－1

其中，10－1(2、3、4、5)必须先退1(即脑记的十位)，然后，由手指伸屈表示其差。直减指算可以归纳为如下口诀：“减看外指，够减直减”。

2.去补加还补减类

(1) 去补加　两数相加，第二加数超5,不能直接加入，如下列题目：

1＋9	6＋9
2＋9(8)	7＋9(8)
3＋9(8、7)	8＋9(8、7)
4＋9(8、7、6)	9＋9(8、7、6)

由于＋6＝＋10－4，＋7＝＋10－3，＋8＝＋10－2,＋9＝＋10－1，指算过程可变成类似形式，如

$$8+7=8+(10-3)$$

$$=10+(8-3)$$

↓ ↓

(进1) (去补)

$$或=(8-3)+10$$

↓ ↓

(去补)(进1)

因此，这种类型的指算可归纳成口诀："直加不够，去补进1"。

(2) 还补减 两数相减，减数超5，不能直减。如下列题目：

10－9(8、7、6)	15－9(8、7、6)
11－9(8、7)	16－9(8、7)
12－9(8)	17－9(8)
13－9	18－9

由于$-6=-10+4$， $-7=-10+3$， $-8=-10+2$，$-9=-10+1$，指算过程可变成类似形式，如

$$16-7=16-(10-3)$$

$$=(16-10)+3$$

(退1) (还补)

$$或=(16+3)-10$$

(还补) (退1)

因此，这种类型的指算可归纳成如下口诀："直减不够，退一还补"。

3.反手加反手减类

(1) 反手加 先研究这样的例子：

1＋5，由于1＋5＝5＋1

(屈拇)4　1＝6(伸拇)

7＋5，由于7＋5＝10＋2

(伸指)3　2＝12(屈指)

从这里可得出如下结论：当一个数加上5，可以由原手指直接反手得到其和。不过，手指由伸变屈时须先进1。这种加5的加法比较简单，但它却是其它反手加的基础。

a)

4＋4(3、2)	9＋4(3、2)
3＋4(3)	8＋4(3)
2＋4	7＋4

上式中由于＋4＝＋5－1，＋3＝＋5－2，＋2＝＋5－3，指算过程可以变成类似形式，如：

$$
\begin{aligned}
3+4 &= 3+(5-1) \\
&= (3+5)-1 \\
&\quad \text{直反手 凑} \\
&\quad \downarrow \\
&= 8-1=7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9+3 &= 9+(5-2) \\
&= (9+5)-2 \\
&\quad \text{直反手 凑} \\
&\quad \downarrow \\
&= 14-2=12
\end{aligned}
$$

因此，这种类型的指算可归纳如下口诀：“去补不够，反手去凑”。

b)　　0 + 6(7、8、9)　　　　5 + 6(7、8、9)

　　　1 + 6(7、8)　　　　　6 + 6(7、8)

　　　2 + 6(7)　　　　　　7 + 6(7)

　　　3 + 6　　　　　　　8 + 6

上式中由于　$+6=+5+1$，$+7=+5+2$，$+8=+5+3$，$+9=+5+4$，指算过程可以变成类似形式，

如：

$$2+7=2+(5+2)$$
$$=(2+5)+2$$

直反手　尾

↓

$$=\ 7+2=9$$

$$7+6=7+(5+1)$$
$$=(7+5)+1$$

直反手　尾

↓

$$=\ 12+1=13$$

因此，这种类型的指算可归纳如下口诀：“去补不够，反手还尾”。

(2) 反手减　先研究这样的例子：

6 - 5　　由于　　$6-5=5-4$

（伸拇）1　　4＝1（屈拇）

9 - 5　　由于　　$9-5=5-1$

（伸指）4　　1＝4（屈指）

从这里可得如下结论：一个数减去5，可由原手指直接反手得到其差。不过，在反手过程中拇指由屈变伸时，应先退1。这种减5的减法指算方法简单，但它却是其它反手减的基础。

a)　　6－4(3、2)　　　　11－4(3、2)

　　　　7－4(3)　　　　　12－4(3)

　　　　8－4　　　　　　13－4

上式中由于－4＝－5＋1，－3＝－5＋2，－2＝－5＋3，指算过程可以变成类似形式，

如　　7－4＝(7－5)＋1

　　　　直反手　凑

　　　　↓

　　＝　2＋1＝3

12－3＝(12－5)＋2

　　　　直反手　凑

　　　　↓

　　＝　7＋2＝9

因此，这种类型的指算可归纳如下口诀："还补不够，反手还凑"。

b)　　9－6(7、8、9、)　　　14－6(7、8、9)

　　　　8－6(7、8)　　　　　13－6(7、8)

　　　　7－6(7)　　　　　　12－6(7)

　　　　6－6　　　　　　　11－6

上式中由于　－6＝－5－1，－7＝－5－2，－8＝－5－3，－9＝－5－4，指算过程可以变成类似形式，如：

8－6＝(8－5)－1

　　　　直反手　尾

　　　　↓

　　＝　3－1＝2

13－8＝(13－5)－3

　　　　直反手　尾

　　　　↓

　　＝　8－3＝5

因此，这种类型的指算可归纳成如下口诀："还补不够，反手去尾"。

三、多位数加减法

1.多位数加法

多位数加法包括连加。将20以内的指算作为基础，其运算法则是：

数位对齐，高位加起，逐位累加，写十记个，以个当十。

运算中脑记(或口读)十位数，手记个位数，当最高位各加数累加(指算)完后，在前位写出十位数，与此同时，个位数当十位数脑记，再对次一位各加数继续累加，这样一直到最末一位各加数累加完为止。

【例1】 8796＋4587＝13383

$$\begin{array}{r} 8796 \\ +\ 4587 \\ \hline 13383 \end{array}$$

运算程序：

(1) 高位加起：8＋4得12，写十记个，以个当十，万位写1，2变20(脑记)。

(2) 逐位累加，算百位：27＋5得32，千位写3，2变20。算十位：29＋8得37，百位写3，7变70。算个位：76＋7得83，十位、个位分别写8和3。

在连加过程中，有时会出现连续进位(即累加超100)的情况，这时可在前位右下角加以脚注，作为过渡，然后，得出最后结果。

【例2】 4789＋3863＋2564＋6952＝18168

$$
\begin{array}{r}
4789 \\
3863 \\
2564 \\
+\ 6952 \\
\hline
17\dot{1}68 \\
\hline
18168
\end{array}
\quad \cdots\cdots\text{过渡式}
$$

运算程序：

(1) 高位加起：4＋3得7，7＋2得9，9＋6得15，写十记个，以个当十，万位写1，5变50(脑记)。

(2) 逐位累加，算百位：57＋8得65，65＋5得70，70＋9得79，千位写7，9变90。算十位：98＋6得104，出现连续进位，向前位7的右下角记“1”，继续累加，04＋6得10，10＋5得15，百位写1，5变50。算个位：59＋3得62，62＋4得66，66＋2得68，十位、个位分别写6和8。

2．多位数减法和加减混合运算

多位数减法，包括连减。在这里，对于减可以按照指算减法逐位计算，也可以运用补数和负数概念将减转化为加，按加法的计算方法计算。现举例介绍第二种方法。

【例3】 7845－2314－3678＝1853

由于314的补数是686，678的补数是322，因此得

$$-2314=-3000+686=\bar{3}686$$

$$-3678=-4000+322=\bar{4}322$$

按如下竖式计算：

$$
\begin{array}{r}
7845 \\
\bar{3}686 \\
+\ \bar{4}322 \\
\hline
1853
\end{array}
$$

运算程序：

(1) 高位算起：$7+\bar{3}$（实际上就是 $7-3$，下同）得4，$4+\bar{4}=0$。

(2) 逐位累加，算百位：08+6得14，14+3得17，千位写1，7变70。算十位：74+8得82，82+2得84，百位写8，4变40。算个位：45+6得51，51+2得53，十位、个位分别写5和3。

【例4】 $7845-4328+8745-6742=5520$，

由于328的补数是672，742的补数是258，因此得

$$-4328=-5000+672=\bar{5}672$$

$$-6742=-7000+258=\bar{7}258$$

可按如下竖式计算：

$$\begin{array}{r} 7\,8\,4\,5 \\ \bar{5}\,6\,7\,2 \\ 8\,7\,4\,5 \\ +\ \bar{7}\,2\,5\,8 \\ \hline 5\,5\,2\,0 \end{array}$$

运算程序：

(1) 高位算起：$7+\bar{5}$得2，2+8得10，$10+\bar{7}$得3，3变30。

(2) 逐位累加，算百位：38+6得44，44+7得51，51+2得53，千位写5，3变30。算十位：34+7得41，41+4得45，45+5得50，百位写5，脑记0。算个位：05+2得07，07+5得12，12+8得20，十位、个位分别写2和0。

必须指出：以上例题(包括多位数加、减、连加、连减及加减混合)在累加运算过程中，都是用指算法进行。

练　习

1) $42678+4913+28754+36=?$

2) $56957+71419+92164+74193+7528+59436=?$

3) $741389-69372-8792-61317-79513=?$

4) $42635+18723+72318+35107+71204+12945=?$

5) $87961-4136+632+824-1326-2832=?$

6) $78192-37684-13427+63126+56132=?$

7) $637513+721954+531826+631573-782914=?$

8) $53186+4507+7312+224+36+28=?$

9)

```
    36274            68247
    72693            67214
    84192            32637
    74196            12913
    32549            68154
    67127            72317
  + 12737          + 63295
  -------          -------
```

10)

```
    42367          7869324
      382          4213174
     4137            13127
    13269           672394
    64513          3815267
     7023               93
  + 43272        +  382679
  -------        ---------
```

4 多位数乘法

速算法的多位数乘数，是完全建立在一位数乘多位数的基础上。所不同的，就是由于乘数位数增多了，运算程序和次数以及积的位数也增多了。但是,这里都有一定的规律性。

一、基本规律

1.看看积的位数　设被乘数的位数是n位,乘数的位数是m位，那么，它们的积的位数就是：$n+m$(位)

在这里如果最高数位的乘积没有进位数时，我们约定它的进位数是0。这就是说，任何两个数相乘,它们的积的位数都是“被乘数位数与乘数位数的和”。

2.看看运算次数　任何两个多位数相乘时，乘数和被乘数的每位数都要相乘一次，不能少乘也不能重乘。由于一位数乘多位数的总乘次是“$n+1$”次(包括定首数)因此，多位数乘多位数的总乘次就是：$(n+1)\times m$(次)，实际上，就是“逐位相乘”。

3.看看运算程序　普通乘法都是乘数位不变，被乘数位变，即乘数的每一位数遍乘被乘数的每位数，然后把相乘积的“同位数”相加(或累加)，最后，达到逐位清，定得数。

然而我们的速算法则是采用高位算起，被乘数位和乘数位依一定程序同时变，从“逐位乘”的原理出发，通过找出相乘积的“同位数”，将积的每个“同位数”分别相加，直接找出总积的每位数，边算边清位，直接报出每位得数。这种运算方法，可以直呼得数，简化运算过程，快速、准确、方便。

二、计算方法

快速计算法的多位数乘法，是直接找总积的每位数来进行的。而总积的每位数，就是所有各位数逐位相乘中所得到的各个“同位数”之和。如何找出那些各个相乘积的“同位数”呢？为了便于掌握找法，让我们首先把乘法算式作如下的规定。

1.算式写法

(1)被乘数首位前面补“0”，表示占最高位相乘所得积的进位数，即代替一位数乘多位数的定首数。实际运算中，定首数相当于乘0。这样就统一了运算程序，不再时而定首数，时而不定首数。熟练以后可以不补“0”，直接在被乘数首位前读一个“0”。

(2)乘数的首数与被乘数的尾数对齐，这种写法，简称“接尾式”。这样写，利于看清运算程序，找相乘二数。以首尾相接位为准，以前(左)，都是乘数的首数开头乘，简称“首开头”以后(右)，都是被乘数的尾数开头乘，简称“尾开头”。

(3)书写积的每位数，积的首位对“0”，以后逐位对齐。这样写便于找出各位相乘的另一个开头数，就是从高位算起，算哪位写哪位，写完以后，“下位”开头。这样两个

开头相乘的数就完全确定了。同时，这样写也利于检查积的位数，只要逐位对齐，不必再去数积的位数，因为被乘数首位前补“0”多出了一位，而乘式的首尾对齐减少了一位，总位数还是没有变。

(4)在相乘的积的“同位数”相加中，满10要进位。积的个位数写在本位，进位数用“点”暂注在前位右下角。这里，进、个分别写(过渡式)，便于检查得数。最后，进、个相加(完成式)。

对照乘法算式的写法，可以把“找积的每位数”的方法，简要地表述为：

高位算起逐位清，分清首尾开头乘，挨位“外移”再相乘，乘积累加再移位，一方无数写得数。

上述统称“外移法”。这里的“高位算起”，包括所补的“0”。“逐位清”，表示算完本位接算下位。“分清首尾开头乘”，是指首尾相接位以前是“首开头”，以后是“尾开头”，再根据逐位清，就定了开头相乘的二数。“外移”，是指以首尾相接位为界，被乘数向前(左)移位，乘数向后(右)移位。“挨位外移”再相乘是指被乘数和乘数同时向外移一位，移位后的二数相乘。这里实际上表示着被乘数扩大十倍，同时乘数缩小十倍，扩大和缩小后的二数相乘，所得的积与原来相乘的积是同位数。“乘积相加再移位”，是指把移位前后乘得的积相加起来，就是积的“同位数”相加。注意：在这里，相加时本位满十要进位；下面要紧接着“挨位外移再相乘”，又得到一个积的“同位数”，将它们累加起来。依此类推。“一方无数写得数”，是指进行移位后，如果被乘数或乘数中有一方没有数时，表明同位数已找完，就可以

写得数了。写完得数后，另开头计算，如上反复进行，直到尾尾相乘为止。尾尾相乘可以直接写得数，不需移位。在相乘时，都要按照一位数乘多位数的方法进行，算被乘数本位要看它的后位定得数，但不全部算完每一位数，只需取本位积就行了。

2.结合手算

在做多位数乘法运算中，可采用手指记数法(见加减法)，暂记相乘中得到的积的个位数。这样便于记同位数相加中累加得到的数，减轻运算中的记忆负担。

下面举例说明多位数乘法的计算方法。

【例1】 5618×234＝?

（开头）

1）	被乘数首位前补“0”	0 5 6 1 8
2）	乘数首数对齐被乘数尾数	× 2 3 4
3）	过渡式的进位点“·”	1 2.0.3.5.1 2
4）	完成式的进、个相加	1 3 1 4 6 1 2
5）	积的每位数的说明编号	①②③④⑤⑥⑦

说明：

① 0×2得1(高位算起，首开头)，首位对“0”写1。

② 2×5得1(逐位清，首开头)，手记1；0×3得1(换位外移乘)，手中1+1=2(乘积累加)；数位对齐写2(本来还可以移位。但是被乘数“0”前面没有数了一方无数写得数。下同)。

③ 6×2得2(逐位清，首开头)，手记2；

5×3得6(外移乘)，手中2+6=8，手记8；
0×4得2(再外移乘)，手中8+2=10，进1写0。

④ 1×2得3(逐位清，首开头)，手记3；6×3得8(外移乘)，手中3+8=11，，进1，手记1；5×4得2(再外移乘)，手中1+2=3，写3(乘数4后位没有数，一方无数写得数)。

⑤ 8×2得6(逐位清，首尾相乘算作首开头)，手记6；1×3得5(外移乘)，手中6+5=11，进1，手记1；
6×4得4(外移乘)，手中1+4=5，写5。

⑥ 8×3得4(逐位清，尾开头)，手记4；1×4得7(外移乘)，手中4+7=11，进1，写1。

⑦ 8×4得2(逐位清，尾开头)，写2(尾尾相乘直接写得数)。最后，将每位的进、个相加(满十要进位)，得到乘积是：1314612(完成式)。检查积的位数：数位对齐共是七位数。抽查积的某位数：只要对准所查数上面的数位，再按照首尾开头的规定，找出它的相乘数，然后挨位外移去相乘，到无数可乘时为止，分别核对前位进数和本位个数就行了。如抽查④：

④上面所对的是"1"，"1"在首尾相接位的前位，因此是"首开头"就是：1×2得3(手记3)；

6×3得8(挨位外移再相乘)，手中3+8=11，进1，手记1；

5×4得2(再挨位外移0相乘)，手中1+2=3。

本来还可以移位，因为乘数4后面没有数，"一方无数写得数"。结果：前位进数是1，本位个数是3。正确。

在多位数乘法里，进行同位数累加时，进几要暂注几个

点。不论积的哪位相加时，满十都要进位。如果首位相乘中的积是0，0可以不写，但要空一位写下位的积，以免出错。

【例2】 2395×3486＝8348970

```
 0 2 3 9 5
×    3 4 8 6
──────────
  7.2.3.8 9 7 0
```

（相乘中积的首位是0，可以不写）

【例3】 224×456＝102144

```
 0 2 2 4
×    4 5 6
─────────
  9.1.1 4 4
```

（本位满十要进位）

练 习

1. 28×42＝？　　736×47＝？

592×924＝？　　7637×326＝？

8392×467＝？　　7326×3724＝？

68039×4073＝？　　3274×2647＝？

78693×92174＝？　　836937×791312＝？

2. 1） 63284×726＝？

```
 0 6 3 2 8 4
×        7 2 6
─────────────
```

2） 54183×6247＝？

```
 0 5 4 1 8 3
×        6 2 4 7
───────────────
```

3） $86249 \times 62407 = ?$

$$\begin{array}{r} 0\ 8\ 6\ 2\ 4\ 9 \\ \times \qquad 6\ 2\ 4\ 0\ 7 \\ \hline \end{array}$$

4） $687267 \times 72369 = ?$

$$\begin{array}{r} 0\ 6\ 8\ 7\ 2\ 6\ 7 \\ \times \qquad 7\ 2\ 3\ 6\ 9 \\ \hline \end{array}$$

5） $642873 \times 742693 = ?$

$$\begin{array}{r} 0\ 6\ 4\ 2\ 8\ 7\ 3 \\ \times \qquad 7\ 4\ 2\ 6\ 9\ 3 \\ \hline \end{array}$$

5 多位数除法

这里所讲的除法速算，是建立在乘法基础上的一种新算法。

一、乘除法的关系

乘除法互为逆运算。这种互逆关系，在速算乘除法上表现在以下几个方面：

1.乘除概念间的联系

普通乘除法有以下关系式：

被乘数×乘数＝积……………………………①

被除数÷除数＝商……………………………②

式②两边同乘以除数，得

除数×商＝被除数……………………………③

但是在速算乘法中有

进界×乘数＝进数……………………………④

将③、④两式比较，可以看出：

除法中的被除数相当于乘法中的进数，商相当于乘数或

进界(本书中将商当作乘数来看待)。在除法中，已知被除数、除数，求商，就是说，已知进数、进界，而求乘数。要能够快速而准确地求出商，就必须熟练地掌握进数、进界和乘数的内在联系。

2.乘除法与加减法的联系

普通乘除法是加减法的简便运算，它们是通过加减法完成其运算的。速算乘除法也是通过加减完成的，但和普通乘除法在运算程序上有所不同。普通乘除法完全是建立在一位数乘法基础之上的。例如，多位数乘法必须先将多位数乘以一位数，依次求出各个部分的积，然后将各部分积错位相加，从而得到积的各位数。而多位数乘法的速算法却是通过被乘数、乘数挨位外移相乘找出各个“同位数”，然后累加来确定积的每位数。速算除法的方法也类似，当某位试商后，通过除数和商挨位外移相乘找出相应的同位数，被除数和这个同位数之和相比较来确商的，求商的过程也作到了“位位清”，可以边算边报答数。

3.乘除法中的“提前”进、退位问题

在速算乘法中，由于运用“乘法进律”作到了“提前进位”。而在除法运算中却相反，即运算中要“提前退位”，特别是多位数除法。在试商过程中要注意这一点。

二、速算除法简介

由于除法是乘法的逆运算，因此可以根据速算乘法归纳出速算除法的运算法则：

高位除起，逐位商。
被除与除，比较商，
被除大者，本位商，
被除小者，补“0”商。
首先试商，再确商，
被除减去，除乘商，
差大于除，加大商，
差等于0，就定商，
差小于除，可确商。
将差移下，继续商。
余后补0，接续商。

1.试商和确商

根据除法运算法则可知，商的每位数的得到，都必须经过试商和确商的过程。试商比较容易，通过被除数与除数相比较来试商，具体地说就是被除数与进数（即进界和试商数的积）相比较。这里，由于被除数是固定的，因此，试商取决进律。试商之后，还要通过被除数和除数与商依次外移相乘所得相应的同位数之和比较来确商（在一位数除法中通过被除数和个律相比较确商）。这里，除数与商依次外移相乘所得同位数之和有可能要进位(特别是除数是多位数)，因此，在试商时，就必须注意这个进位的可能性，也就是说，试商数必须使进数(包括同位数之和的进数)不超过被除数。一般地讲，当商到二、三位时，试商数必须使相应的进数比被除数小1。当商到四、五位时，必须使进数比被除数小2。这也只是大致的估计，到底试商多少，还必须通过具体计算来决定。

2.商的定位

速算除法都是先计算后定位的。商的定位和被除数、除数的位数有关，在除的过程中，一方面由于本位够除(够减)本位商，本位不够除(不够减)，本位补“0”商；另一方面，不论首位够除与否，被除数首位之前都可看作有“0”存在。商都是这样定位的。设m、n分别代表被除数、除数的位数，(当被除数，除数是整数或带小数，m、n表示整数的位数；当被除数、除数是纯小数，m、n表示小数点之后的0的个数，)那么，商的位数是

$$m-n+1$$

①当$m-n+1=0$，说明商的小数点之后不带0；

②当$m-n+1<0$，说明商的小数点之后有$m-n+1$个0；

③当$m-n+1>0$，说明商中整数部分有$m-n+1$位。

注意：

a) 当$m-n+1\leqslant 0$时，小数点之后所补的0不包括首位不够除时所补的0。

b) 从上边定位法看出，一位数除法中商的定位完全取决于被除数，即商的小数点位置和被除数小数点位置是相同的。

3.余数的确定

在除的过程中，当商到予先指定的位数时，要找出余数，一位数除法和多位数除法略有不同。一位数除法当除到末位，从被除数中减去除数与商的末位数之积，所得差数就是它的余数。而当除数是多位数时，除到最后位，还必须完成整个运算过程才能得到最后的余数，即必须依次从被除数（包括

后边所补的０）剩余部分相继减去除数和商外移相乘所得 各个“同位数之和”，才能得到最后的余数（这个余数必须小于除数）。

4.商的检验

当求出商和余数之后，可以根据乘除的互逆关系用乘法加以检验。即观察除数乘以商再加上余数是否等于被除数，以此来判断商是否正确。如果要检验商的某一位是否正确，只要将被除数相应位上的数和除数以及商外移相乘所得同位数之和加以比较就可以了。

【例1】 45287346÷3245＝？

被除数首位前可看作有“0”，下同。

（0）45287346÷3245＝ 1　3　9　5　6
　　　　　　　　　　　(1)(2)(3)(4)(5)

运算程序如下：

(1) 首先试商与确商。看被除数(04)，进界(除数)是3245(看作3)，又知进数是0，因此，试商范围是1、2、3。

当试商2、3时个律是6、9，和被除数4比较，说明商2、3过大。

当试商1时，个律是3，和被除数4比较，说明商1恰当。所以，第一位商是1。

(2) 由于4－3＝1，看被除数(15)，为了防止后边同位数之和进位，把进数当作0；因此,试商范围是：1、2、3。

当分别试商1和2时，除数(32)和商(11和12)外移相乘的同位数之和为5、8，和被除数15比较,说明商1、2过小。

当试商3时，除数(32)和商(13)外移相乘的同位数之和

为11，和被除数15比较，说明第二位商可为3。

（3）由于15－（0＋11）＝4，看被除数（42），为了防止后边进位，将进数看作2，因此，试商范围是：7、8、9。

当试商7、8时，除数（324）和商（137或138）外移相乘所得同位数之和是13或16，和被除数42相比，说明商7、8过小。

当试商9时，除数（324）和商（139）外移相乘所得同位数之和是20，因此，第三位商是9。

（4）由于42－（20＋20）＝2，看被除数（28），为了防止后位同位数之和有进位数。将进数看作1，因此，试商范围是4、5、6。

当试商4时，除数（3245）和商（1394）外移相乘所得同位数之和为12，和被除数28比较，说明商4过小。

当试商6时，除数（3245）和商（1396）外移相乘所得同位数之和为19，和被除数28比较，说明商6过大。因此，第四位商为5。

（5）由于28－（10＋16）＝2，看被除数（27），为了防止后边进位，将进数当作1，那么，试商范围是：4、5、6。

当试商4、5时，除数（3245）和商（3954）或（3955）外移相乘所得同位数之和为9或13，和被除数27比较，说明商4、5过小。因此，第五位商是6。

（6）再求余数。由于27－（10＋16）＝1，看被除数（13），再减去除数（245）和（956）外移相乘所得同位数之和11，前者减去后者，即13－11＝2；又看被除数（24），而除数（45）和商（56）外移相乘所得同位数之和12，前者减去后者，即24－12＝12；看被除数（126），再减去除数5和商6的乘积（个位）为0，

前者减去后者，126－0＝126，因此，余数是126。

由于$m=8$，$n=4$

$m-n+1=8-4+1=5$

因此，商是13956。

在运算过程中，由于采取迭位逆减，逐位定商，算完本位，以个(差)当十(进)，接算下去，直到末位为止。因此，为了提高运算速度和准确性，可以脑记(或口读)十位，手记个位，依次接算下去。

【例2】 35874÷432＝?

```
除  数：      (0)4 3 2
商  数：          0 8 3 0 4
            ─────────────
被除数：      (0)3 5 8 7 4
               脑  手
               记  记

    － 0 0
   ─────────
 (脑记) 3 5 (手记)
      － 3 4 手算
     ─────────
   (脑记) 1 8 (手记)
        － 1 7 手算
       ─────────
     (脑记) 1 7 (手记)
          － 0
          － 1 5 手算
         ─────────
       (脑记) 2 4 (手记)
            － 1
                 手算
            － 1 3
           ─────────
         (脑记) 1 0 (补0，手记)
              － 2 手算
             ─────────
           (脑记) 8 0 (补0，手记)
                － 8 手算
               ─────────
                7 2……余数
```

由于$m=5$　　$n=3$

$$m-n+1=5-3+1=3$$

因此，商是083.04，即商是83.04。余数是72。

练　　习

62178÷86＝？　　52863÷67＝？

365472÷864＝？　　415493÷738？

63553322÷763＝？　　232128÷624＝？

538395336÷68472＝？

609226829÷82674＝？（需求出余数）

68788÷974＝？（小数点保留三位，并求出余数）

28329486÷6874＝？

（小数点保留四位，并求出余数）

附　　录

一、乘法附注1、2的数学证明

1.任何一个n位数乘以一个m位数，其结果将是一个$n+m$位数或$n+m-1$位数。

证明：设　　$a_i(i=1、2、3、\cdots\cdots n)$

$b_j(j=1、2、3、\cdots\cdots m)$

分别表示一个数的某位数字，并设$a_1\neq 0$，$b_1\neq 0$则一个n位数可表示为$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i10^{n-i}$，一个$m$位数可表示为$\sum\limits_{j=1}^{m}b_j10^{m-j}$。

$$\because \quad 10^{n-1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i10^{n-i}<10^{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$$10^{m-1}\leqslant\sum_{j=1}^{m}b_j10^{m-j}<10^{m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②$$

∴　将①②两式相乘得

$$10^{n+m-2}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i10^{n-i}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j10^{m-j}\right)<10^{n+m}\cdots\cdots③$$

设乘积　$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i10^{m-i}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j10^{n-i}\right)=\sum_{k=1}^{p}c_k10^{p-k}$$

p为乘积的位数，而

$$10^{p-1} \leqslant \sum_{k=1}^{p} c_k 10^{p-k} < 10^p \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

式④与式③比较可得

$$p-1=n+m-2$$

∴ $$p=n+m-1$$

或 $$p=n+m$$

若 $m=1$，即乘数是个一位数b_1，则乘积的位数 $p=n$ 或$n+1$。

2. $\frac{1}{b}$是乘数为b时的进位单位

设被乘数为$\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{n-i}$，乘数为$b$，则$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{n-i}\right) \cdot b$是一个$n$位数或$(n+1)$位数。为了说法统一，而便利于联系其他计算工具，我们约定把n位数也当作$(n+1)$位数，而第一位是“0”。

这样，$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{n-i}\right)$与$b$的积可以表示为$\sum_{j=1}^{n+1} c_j 10^{n+1-j}$

于是我们得到

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{n-i}\right) \cdot b = \sum_{j=1}^{n+1} c_j 10^{n+1-j}。$$

下面的问题就是要从积的第一位数c_1开始，逐位求出积的任何一位数字c_x。

我们把被乘数分成三部分：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i 10^{n-i} = \sum_{i=1}^{x-2} a_i 10^{n-i} + a_{x-1} 10^{n-x+1} + \sum_{i=x}^{n} a_i 10^{n-i},$$

于是$\sum_{j=1}^{n+1} c_j 10^{n+1-j} = \left(\sum_{i=1}^{x-2} a_i 10^{n-i}\right) \cdot b + (a_{x-1} 10^{n-x+1}) \cdot b +$

$\left(\sum_{i=x}^{n} a_i 10^{n-i}\right) \cdot b$，用$10^{n-x+1}$除等式两边得

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j 10^{x-j} = \left(\sum_{i=1}^{x-2} a_i 10^{x-1-i}\right) \cdot b + (a_{x-1}) \cdot b$$

$+\left(\sum_{i=x}^{n} a_i 10^{x-1-i}\right) \cdot b$，$c_x$就是$\sum_{j=1}^{n+1} c_j 10^{x-j}$的个位数。

根据普通乘法规律，我们知道c_x是由$(a_{x-1}) \cdot b$的个位数与$\left(\sum_{i=x}^{n} a_i 10^{x-1-i}\right) \cdot b$进到个位的数相加而得到。

$\left(\sum_{i=x}^{n} a_i 10^{x-1-i}\right) \cdot b$要能进位到个位数，必须满足

$$\left(\sum_{i=x}^{n} a_i 10^{x-1-i}\right) \cdot b \geqslant 1,$$

即
$$\left(\sum_{i=x}^{n} a_i 10^{x-1-i}\right) \geqslant \frac{1}{b}$$

显然，$\frac{1}{b}$就是乘数为b时的进位单位。

当$2\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant R < 3\left(\frac{1}{b}\right)$时，就进2；$3\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant R < 4\left(\frac{1}{b}\right)$时，就进3；依此类推。

二、个律表

个律 \ 被乘数(本) / 乘数	偶数					奇数					个律找法 以被乘数(本)为准
	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5						5	5	5	5	5	偶 0，奇 5
1	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9	自身
6						6	8	0	2	4	偶自身，奇±5(或取偶同)
2	0	4	8	2	6	2	6	0	4	8	自加
7						7	1	5	9	3	偶自加，奇自加±5(或取偶同)
3	0	6	2	8	4	3	9	5	1	7	偶补倍，奇倍凑
8						8	4	0	6	2	补倍
4	0	8	6	4	2	4	2	0	8	6	偶补，奇凑
9						9	7	5	3	1	取补

三、几点说明

1.偶同数 两数同乘以一个偶数，个律相同，这两数互称偶同数。共有0与5、1与6、2与7、3与8、4与9五对。可以看出，偶同数相差5，±5等于取偶同数。

2.补数 凡两数之和是10，则这二数互为补数。共有1+9=10、2+8=10、3+7=10、4+6=10、5+5=10五对。其中4与6就互为补数，余同。

3.凑数 凡二数之和的个位是5，则这二数互为凑数。共有1+4=5、2+3=5、5+0=5、6+9=15、7+8=15五对。其中1与4就互为凑数，余同。